Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

PROBLEME I

On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et définies sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $f \in \mathbb{E}$ on note $\Phi(f)$ la fonction définie pour x positif ou nul par $\Phi(f)(x) = \int_0^1 f(xt)dt$.

PARTIE A : L'ENDOMORPHISME Φ :

1°- Montrer que pour x strictement positif $\Phi(f)(x)$ peut s'écrire $\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}$.

2°- Déduire que la fonction $\Phi(f)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est continue en 0.

3°- Montrer que l'application Φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{E}$.

4°- On donne la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) \text{ pour } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$.

La fonction h est elle un élément de l'image $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ par Φ ? Caractériser cette image.

5°- Montrer que tout réel $\lambda \in]0,1]$ est valeur propre de Φ. Donner les vecteurs propres associés.

6°- Soit n un entier naturel. On considère le sous espace vectoriel $\mathbb{F}_n$ de $\mathbb{E}$ engendré par les fonctions $\{f_1,..,f_n ; g_1,...g_n\}$ où les fonctions f_i et g_i sont définies par :

$$\begin{cases} f_i : x \to f_i(x) = x^i \\ g_i : x \to g_i(x) = x^i \ln x \text{ pour } x \text{ non nul et } g_i(0) = 0 \end{cases}.$$

(i) Donner la dimension du sous espace $\mathbb{F}_n$.

(ii) Montrer que la restriction Φ_n de Φ à $\mathbb{F}_n$ est un endomorphisme. Donner une matrice de Φ_n.

(iii) Déterminer la fonction f de $\mathbb{E}$ telle que $\Phi(f)(x) = (x + x^2)\ln x$.

PARTIE B : L'APPLICATION Φ ET PROPRIÉTES DE MONOTONIE

1°- Montrer que si f et g de $\mathbb{E}$ vérifient $f \leq g$ alors $\Phi(f) \leq \Phi(g)$.

2°- Montrer que si f de $\mathbb{E}$ est croissante (respectivement décroissante) alors $\Phi(f)$ est aussi une fonction croissante (respectivement décroissante).

3°- Montrer que si f de $\mathbb{E}$ est croissante (respectivement décroissante) alors $\Phi(f) \leq f$ (respectivement $\Phi(f) \geq f$)

PARTIE C : ETUDE DES ITÉRÉS DE Φ :

Pour *n* entier strictement positif on désigne par Φ^n l'application $\underbrace{\Phi \circ \Phi \circ .... \circ \Phi}_{n\ fois}$.

1°- Soit *f* une fonction de $\mathbb{E}$ croissante, positive et continue.

Pour *x* positif ou nul on note $u_n(x)$ le réel $\Phi^n(f)(x)$.

(i) Donner l'expression de $u_n(0)$.

(ii) Montrer que pour tout entier *n* strictement positif la fonction $x \to u_n(x)$ est croissante.

(iii) Montrer que pour tout réel *x* la suite $\{u_n(x), n \in N^*\}$ est décroissante et positive. En déduire sa convergente. On note *l(x)* cette limite. Montrer que la fonction $x \to l(x)$ est croissante.

(iv) Pour *x* strictement positif montrer l'égalité : $x(u'_1(x)+...+u'_n(x)) = f(x)-u_n(x)$.

En déduire que, pour $0<x<y$, la série de terme général $u_n(y)-u_n(x)$ est convergente.

(v) Conclure alors que la fonction *l* est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer ensuite que cette constante est égale à *f(0)*.

2°- Etendre succinctement les résultats obtenus à la question précédente aux fonctions de $\mathbb{E}$ décroissantes et positives.

3°- Soit *f* une fonction de $\mathbb{E}$ positive.

On note *S* et *I* les fonctions définies par :

$$S(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t) \text{ et } I(x) = \inf_{t\in[0,x]} f(t).$$

Montrer que les fonctions *S* et *I* appartiennent à l'ensemble $\mathbb{E}$. En appliquant aux fonction *S* et *I* les résultats des questions précédentes montrer que la suite $\{\Phi^n(f)(x), n \in N^*\}$ converge pour tout *x* vers *f(0)*. Etendre ce résultat à toute fonction *f* de $\mathbb{E}$.

PROBLEME II

Soit $\{p_k, k \in N^*\}$ la suite des entiers premiers ordonnés par valeurs croissantes. (On rappelle qu'un entier premier a exactement deux diviseurs distincts 1 et lui-même).

Pour x et y réels positifs avec x>y on note :

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si l'ensemble } E=\{i \text{ tel que } y < p_i \le x\} = \varnothing \\ \prod_{i\,/\,y<p_i\le x} p_i \quad \text{si l'ensemble } E \neq \varnothing \end{cases}.$$

On note aussi : *K(x)=P(x,0)*.

PARTIE A : FONCTION MAJORANTE DE LA FONCTION K.

1°- Donner p_1,p_2 et p_3 et l'expression de *K(x)* pour *x* réel positif inférieur ou égal à 6. Donner les points de discontinuités de la fonction *K*.

2°- Montrer pour $0 \le z \le y \le x$ la relation : $P(x,z) = P(x,y)P(y,z)$.

3°- Soit *n* un entier pair supérieur ou égal à 2. On pose *n*=2*m*.

(i) Montrer que l'entier *P(2m+1,m+1)* divise l'entier C_{2m+1}^{m} (nombre de combinaisons de *m* objets pris dans 2*m+1* objets. (On pourra remarquer que chaque entier premier du produit *P(2m+1,m+1)* divise C_{2m+1}^{m}).

(ii) En déduire la majoration $P(2m+1,m+1) \le C_{2m+1}^{m} \le 2^{2m}$.

4°- On note *[x]* la partie entière de *x*.

Déduire de la question 3 la majoration : $K(x) \le 4^{[x]}$.

PARTIE B : FONCTION MAJORANTE DU NOMBRE DE D'ENTIERS PREMIERS INFÉRIEURS À UN RÉEL *X*.

On note *N* la fonction définie par : *N(x)* : nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à *x*.

Pour $x \ge 2$ on note *S(x)* la fonction définie par $S(x) = ln(K(x))$.

1°- Déduire de la partie A un majorant de *S(x)*.

2°- Soit *f* une fonction définie sur *[2,∞[* à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue.

(i) Montrer que pour *k* entier on a :

$$\int_2^{p_k} S(t) f'(t) dt = -\sum_{i=1,..,k} ln(p_i) f(p_i) + S(p_k) \times f(p_k).$$

(ii) Déduire pour tout réel *x* supérieur ou égal à 2 la relation :

$$\sum_{i=1,..,N(x)} ln(p_i) f(p_i) = S(x) \times f(x) - \int_2^x S(t) f'(t) dt.$$

3°- On prend pour fonction *f* la fonction $f(x) = \frac{1}{ln\, x}$.

Déduire du 2° l'inégalité : $N(x) \le 2 ln\, 2 \left[\frac{x}{ln\, x} + \int_2^x \frac{dt}{(ln\, t)^2} \right]$.

4°- Majoration de l'intégrale : $\int_2^x \frac{dt}{(ln\, t)^2}$:

(i) Etudier sur l'intervalle *[ln2,∞[* la fonction $u \to \frac{e^u}{u^2}$. Montrer qu'il existe un unique réel (noté u_0) strictement supérieur à *ln*2 tel que $\frac{e^{u_0}}{u_0^2} = \frac{2}{(ln\, 2)^2}$.

(ii) En déduire :

$$\int_{ln\, 2}^{ln\, x} \frac{e^u}{u^2} du \le \frac{x}{(ln\, x)^2} (ln\, x - ln\, 2) \quad pour\ x > e^{u_0}.$$

(iii) Déduire alors une majoration de $\int_2^x \frac{dt}{(ln\, t)^2}$.

5°- Déduire que, pour *x* supérieur à e^{u_0} l'inégalité : $N(x) \le 4 ln\, 2 \frac{x}{ln\, x}$.
